

# 含非线性色散项的 Kadomtsev-Petrishvili 方程的破缺行波解\*

高正晖, 杨 柳

(衡阳师范学院数学与计算机科学系, 湖南 衡阳 421008)

**摘要:** 应用平面动力系统分支理论的方法, 在参数平面上给出了含非线性色散项的 Kadomtsev-Petrishvili 方程的行波解的分支相图, 从而揭示了其行波解与参数的依赖关系, 并获得了该方程的破缺行波解的参数表示。

**关键词:** 非线性色散 Kadomtsev-Petrishvili 方程; 环状孤波解; 破缺行波解; 分支相图

**中图分类号:** O175.29 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2011) 01-0034-05

## Breaking Traveling Wave Solutions of Kadomtsev-Petrishvili Equation with Nonlinear Dispersive Terms

GAO Zhenghui, YANG Liu

(Department of Mathematics and Computational Science, Hengyang Normal University, Hengyang 421008, China)

**Abstract:** Bifurcation phase portraits of traveling wave solution for Kadomtsev-Petrishvili equation with nonlinear dispersive terms are given by using bifurcation theory of dynamical systems. Parametric representations of breaking traveling wave solutions of Kadomtsev-Petrishvili equation with nonlinear dispersive terms are obtained.

**Key words:** Kadomtsev-Petrishvili equation; nonlinear dispersive; loop soliton solution; breaking traveling wave solution; bifurcation phase portrait

自 1981 年 Konno 等<sup>[1]</sup>首次报告非线性振动模型存在环状孤波解以来, 引起了许多学者对非线性发展方程环状孤波解的关注, 现已发表了一些关于非线性发展方程的环状孤波解的学术论文<sup>[2-4]</sup>。近年来, 李继彬<sup>[5-8]</sup>, 刘正荣<sup>[9-10]</sup>等运用动力系统的分支理论对一些非线性发展方程的行波解的动力学行为进行了研究, 发现一些非线性发展方程的环状孤波解不是一个真正的解, 它是由三个破缺行波解所组成, 并给出了一些非线性发展方程破缺行波解的参数表示。

1970 年, Kadomtsev 等<sup>[11-12]</sup>首次提出如下二维的 KdV 方程, 即 KP 方程

$$(u_t + uu_x + u_{xxx})_x + \varepsilon u_{yy} = 0 \quad (1)$$

它是一个重要的非线性偏微分方程, 该方程有着广泛的物理背景, 常用来描述二维小振幅弱色散波, 如二维浅水波、未磁化等离子体声波等, 在流体力学、等离子体物理、气体动力学等领域有重要的应用, 对它的深入研究将有利于实际物理问题的解决。本文的目的是对含非线性色散项的 Kadomtsev-Petrishvili 方程

$$(u_t + uu_x + (u^2)_{xxx})_x + \varepsilon u_{yy} = 0 \quad (2)$$

进行研究, 运用动力系统分支理论对方程 (2) 的行波系统的动力学行为进行分析, 根据这些分析, 我们也获得了该行波系统存在环状孤波解, 它也是由三个破缺行波解所组成, 并给出了破缺行波解的参数表示。

\* 收稿日期: 2010-01-14

基金项目: 湖南省自然科学基金资助项目 (06JJ5001); 湖南省教育厅科研计划资助项目 (09C171)

作者简介: 高正晖 (1959 年生), 男, 副教授; E-mail: gaozh828@163.com

### 1 行波系统的分支相图

对于方程 (2)，我们作如下行波变换： $\xi = x + \alpha y + \beta t, u(x, y, t) = \varphi(\xi)$ ，其中  $\alpha, \beta$  为待定常数。由此方程 (2) 约化为常微分方程

$$(\beta\varphi'(\xi) + \varphi(\xi)\varphi'(\xi) + (\varphi^2(\xi))''')' + \varepsilon\alpha^2\varphi''(\xi) = 0 \tag{3}$$

对 (3) 式积分并取积分常数为 0，得

$$\beta\varphi'(\xi) + \varphi(\xi)\varphi'(\xi) + (\varphi^2(\xi))'' + \varepsilon\alpha^2\varphi'(\xi) = 0 \tag{4}$$

再对 (4) 式积分并取积分常数为  $g$ ，得

$$(\beta + \varepsilon\alpha^2)\varphi(\xi) + \frac{1}{2}\varphi^2(\xi) + 2\varphi^2(\xi) + 2\varphi(\xi)\varphi''(\xi) = g \tag{5}$$

令  $\varphi' = v$ ，并令  $\lambda = \beta + \varepsilon\alpha^2$ ，则可得以下平面自治系统（行波系统）

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{d\xi} = v \\ 2\varphi \frac{dv}{d\xi} = g - \lambda\varphi - \frac{1}{2}\varphi^2 - 2v^2 \end{cases} \tag{6}$$

令  $d\xi = 2\varphi d\tau$ ，则除奇异直线  $\varphi = 0$  外，行波系统 (6) 与下面的可积系统有相同的拓扑结构

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{d\tau} = 2\varphi v \\ 2\varphi \frac{dv}{d\tau} = g - \lambda\varphi - \frac{1}{2}\varphi^2 - 2v^2 \end{cases} \tag{7}$$

显然，行波系统 (7) 的首次积分是

$$H(\varphi, v) = \varphi^2(4g - \frac{8}{3}\lambda\varphi - \varphi^2 - 8v^2) = h \tag{8}$$

对于行波系统 (7)，其平衡点满足方程组

$$\begin{cases} 2\varphi v = 0 \\ g - \lambda\varphi - \frac{1}{2}\varphi^2 - 2v^2 = 0 \end{cases} \tag{9}$$

当  $\Delta = \lambda^2 + 2g > 0$  时，行波系统 (7) 在  $\varphi$  轴上有平衡点  $M_1(-\lambda + \sqrt{\Delta}, 0), M_2(-\lambda - \sqrt{\Delta}, 0)$ ，记  $h_1 = H(-\lambda + \sqrt{\Delta}, 0) = \frac{1}{3}(-\lambda + \sqrt{\Delta})^3(\lambda + 3\sqrt{\Delta})$ ， $h_2 = H(-\lambda - \sqrt{\Delta}, 0) = \frac{1}{3}(\lambda + \sqrt{\Delta})^3(-\lambda + 3\sqrt{\Delta})$ 。

又记  $M(\varphi_i, v_j)$  为行波系统 (7) 的线性系统在平衡点  $(\varphi_i, v_j)$  的系数矩阵，其 Jacobi 行列  $J(\varphi_i, v_j) = \det M(\varphi_i, v_j)$ ，根据平面动力系统理论，对于平面可积系统 (7) 的平衡点，若  $J > 0$ ，则它是中心；若  $J < 0$ ，则它是鞍点；若  $J = 0$  并且在平衡点的 Poincare 指标为 0，则它是尖点，否则，该平衡点是高次平衡点。

1) 当  $\lambda > 0, g < 0$  时，该系统在平衡点  $M_1(-\lambda + \sqrt{\Delta}, 0)$  的 Jacobi 行列式为  $J_1 < 0$ ，因此平衡点  $M_1(-\lambda + \sqrt{\Delta}, 0)$  是鞍点；在平衡点  $M_2(-\lambda - \sqrt{\Delta}, 0)$  的 Jacobi 行列式为  $J_2 > 0$ ，因此平衡点  $M_2(-\lambda - \sqrt{\Delta}, 0)$  是中心。由  $H(\varphi, v) = \varphi^2(4g - \frac{8}{3}\lambda\varphi - \varphi^2 - 8v^2) = h_1$  所确定的平面曲线，我们能够得到行波系统 (7) 随参数  $(\lambda, g)$  改变的平面相图（如图 1）。

2) 当  $\lambda < 0, g < 0$  时，该系统在平衡点  $M_1(-\lambda + \sqrt{\Delta}, 0)$  的 Jacobi 行列式为  $J_1 > 0$ ，因此平衡点  $M_1(-\lambda + \sqrt{\Delta}, 0)$  是中心；在平衡点  $M_2(-\lambda - \sqrt{\Delta}, 0)$  的 Jacobi 行列式为  $J_2 < 0$ ，因此平衡点  $M_2(-\lambda - \sqrt{\Delta}, 0)$  是鞍点。由  $H(\varphi, v) = \varphi^2(4g - \frac{8}{3}\lambda\varphi - \varphi^2 - 8v^2) = h_2$  所确定的平面曲线，我们能够得到行波系统 (7) 随参数  $(\lambda, g)$  改变的平面相图（如图 1）。

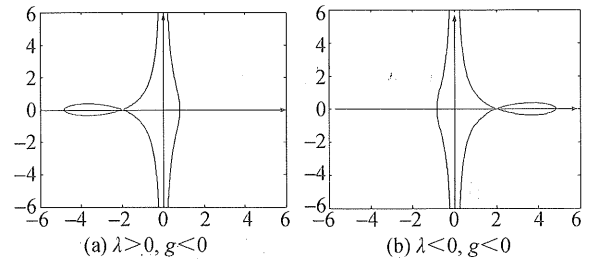


图 1 行波系统 (7) 的平面相图  
Fig. 1 The plane phase portraits of the traveling wave systems (7)

### 2 破缺行波解的参数表示

1) 当  $\Delta = \lambda^2 + 2g > 0$  且  $\lambda > 0, g < 0$  时，方程的破缺行波解的参数表示。

当  $\lambda > 0, g < 0$  时，由  $H(\varphi, v) = \varphi^2(4g - \frac{8}{3}\lambda\varphi - \varphi^2 - 8v^2) = h_1$  所确定的水平曲线在  $\tau$  的有限变化范围内分别趋于奇异直线  $\varphi = 0$ ，根据文 [7] 可知：该轨线对应于行波系统 (7) 的破缺行波解。由  $H(\varphi, v) = \varphi^2(4g - \frac{8}{3}\lambda\varphi - \varphi^2 - 8v^2) = h_1$ ，可得  $v = \pm \frac{1}{2\sqrt{6}\varphi} \sqrt{-3h_1 + 12g\varphi^2 - 8\lambda\varphi^3 - 3\varphi^4}$ ，代入行波系统 (7) 的第一个方程得

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{-3h_1 + 12g\varphi^2 - 8\lambda\varphi^3 - 3\varphi^4} \quad (10)$$

将  $d\xi = 2\varphi d\tau$  与  $h_1 = H(-\lambda + \sqrt{\Delta}, 0) = \frac{1}{3}(-\lambda +$

$\sqrt{\Delta})^3(\lambda + 3\sqrt{\Delta})$  代入(10)式, 得

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}\varphi} [\varphi - (-\lambda + \sqrt{\Delta})] \cdot \sqrt{\frac{4\lambda}{9}(\lambda + 3\sqrt{\Delta}) - \left(\varphi + \frac{\lambda + \sqrt[3]{\Delta}}{3}\right)^2} \quad (11)$$

由(11)式可得

$$\frac{\varphi d\varphi}{[\varphi - (-\lambda + \sqrt{\Delta})] \sqrt{\frac{4\lambda}{9}(\lambda + 3\sqrt{\Delta}) - \left(\varphi + \frac{\lambda + \sqrt[3]{\Delta}}{3}\right)^2}} = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}} d\xi \quad (12)$$

由此得到行波系统(6)由三个破缺行波解组成的环状孤波解

$$\pm \frac{1}{2\sqrt{2}} \xi - \xi_0 =$$

$$\int \frac{\varphi d\varphi}{[\varphi - (-\lambda + \sqrt{\Delta})] \sqrt{\frac{4\lambda}{9}(\lambda + 3\sqrt{\Delta}) - \left(\varphi + \frac{\lambda + \sqrt[3]{\Delta}}{3}\right)^2}} \quad (13)$$

其中  $\xi_0$  是积分常数。

特别地, 若  $\lambda = 3\sqrt{\Delta}$ , 则(12)式可变为

$$\pm \frac{1}{2\sqrt{2}} d\xi = \frac{d\varphi}{\sqrt{8\Delta - (\varphi + 2\sqrt{\Delta})^2}} + \frac{(-2\sqrt{\Delta})d\varphi}{(\varphi + 2\sqrt{\Delta}) \sqrt{8\Delta - (\varphi + 2\sqrt{\Delta})^2}}$$

因此, 得

$$\int \frac{(-2\sqrt{\Delta})d\varphi}{(\varphi + 2\sqrt{\Delta}) \sqrt{8\Delta - (\varphi + 2\sqrt{\Delta})^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{Arcosh} \frac{\sqrt{8\Delta}}{(\varphi + 2\sqrt{\Delta})}$$

令  $\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{Arcosh} \frac{\sqrt{8\Delta}}{(\varphi - 2\sqrt{\Delta})}$ , 可得

$$\varphi(\theta) = \sqrt{8\Delta} \text{sech} \sqrt{2}\theta - 2\sqrt{\Delta}$$

从而解得

$$\xi(\theta) = \pm 2\sqrt{2}\theta \pm \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \tanh(\sqrt{2}\theta) + \xi_0$$

由此得到行波系统(6)由三个破缺行波解组成的环状孤波解(如图2)的参数表示

$$\begin{cases} \varphi(\theta) = \sqrt{8\Delta} \text{sech} \sqrt{2}\theta - 2\sqrt{\Delta} \\ \xi(\theta) = 2\sqrt{2}\theta \pm \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \tanh(\sqrt{2}\theta) + \xi_0 \end{cases} \quad (\theta \text{ 为参数}) \quad (14)$$

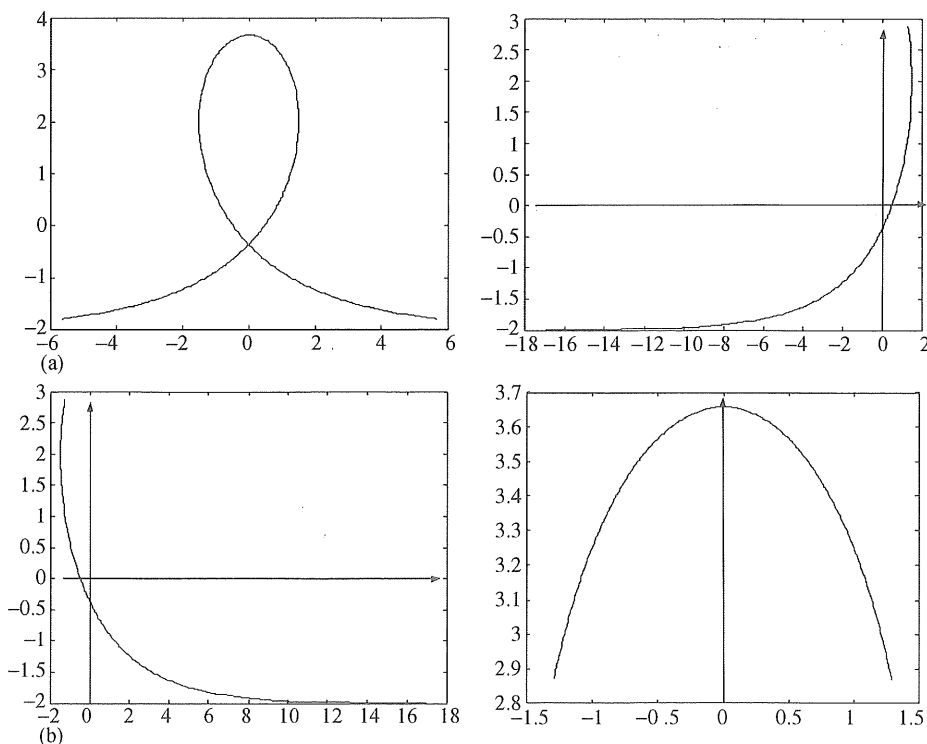


图 2 参数方程(14)的平面图

Fig. 2 The plane graphs of the parametric equation (14)

(a) 参数方程(14)的平面图, 其中  $\Delta=1$ ; (b) 参数方程(14)三个破缺行波解的平面图

又由于行波系统 (6) 存在奇异直线  $\varphi=0$ , 使得该行波系统不连续, 成为奇异行波系统。受奇异直线  $\varphi=0$  的影响, 应有  $\varphi(\theta)<0$ , 取  $\theta_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\text{Arsech}$

$\sqrt{2}$ , 由 (14) 式表示的环状孤波解是由  $\theta \in (-\infty, \theta_0), \theta \in (\theta_0, \infty), \theta \in (-\theta_0, \theta_0)$  的三个破缺行波解组成 (如图 2)。

2) 当  $\Delta = \lambda^2 + 2g > 0$  且  $\lambda < 0, g < 0$  时, 方程的破缺行波解的参数表示。

当  $\Delta = \lambda^2 + 2g > 0$  且  $\lambda < 0, g < 0$  时, 由  $H(\varphi, v) = \varphi^2(4g - \frac{8}{3}\lambda\varphi - \varphi^2 - 8v^2) = h_2$  所确定的水平曲线在  $\tau$  的有限变化范围内分别趋于奇异直线  $\varphi=0$ , 根据文 [7] 可知: 该轨线对应于行波系统 (7) 的破缺行波解。类似上述 2.1 的讨论, 可得

$$\frac{\varphi d\varphi}{[\varphi - (-\lambda + \sqrt{\Delta})] \sqrt{\frac{4\lambda}{9}(\lambda - 3\sqrt{\Delta}) - \left(\varphi + \frac{\lambda - \sqrt{\Delta}}{3}\right)^2}} = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}} d\xi \quad (15)$$

由此得到行波系统 (6) 由三个破缺行波解组成的环状孤波解

$$\pm \frac{1}{2\sqrt{2}} \xi - \xi_0 =$$

$$\int \frac{\varphi d\varphi}{[\varphi - (-\lambda + \sqrt{\Delta})] \sqrt{\frac{4\lambda}{9}(\lambda - 3\sqrt{\Delta}) - \left(\varphi + \frac{\lambda - \sqrt{\Delta}}{3}\right)^2}} \quad (16)$$

其中  $\xi_0$  是积分常数。

特别地, 若  $\lambda = -3\sqrt{\Delta}$ , 则 (16) 式变为

$$\pm \frac{1}{2\sqrt{2}} d\xi = \frac{d\varphi}{\sqrt{8\Delta - (\varphi + 2\sqrt{\Delta})^2}} + \frac{(2\sqrt{\Delta}) d\varphi}{(\varphi - 2\sqrt{\Delta}) \sqrt{8\Delta - (\varphi - 2\sqrt{\Delta})^2}}$$

因此, 得

$$\int \frac{(2\sqrt{\Delta}) d\varphi}{(\varphi - 2\sqrt{\Delta}) \sqrt{8\Delta - (\varphi - 2\sqrt{\Delta})^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{Arcosh} \frac{\sqrt{8\Delta}}{(\varphi + 2\sqrt{\Delta})}$$

令  $\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{Arcosh} \frac{\sqrt{8\Delta}}{(\varphi - 2\sqrt{\Delta})}$ , 可得

$$\varphi(\theta) = -\sqrt{8\Delta} \text{sech} \sqrt{2}\theta + 2\sqrt{\Delta}$$

从而解得

$$\xi(\theta) = \pm 2\sqrt{2}\theta \pm \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \tanh(\sqrt{2}\theta) + \xi_0$$

由此得到行波系统 (6) 的由三个破缺行波解组成的环状孤波解 (如图 3) 的参数表示

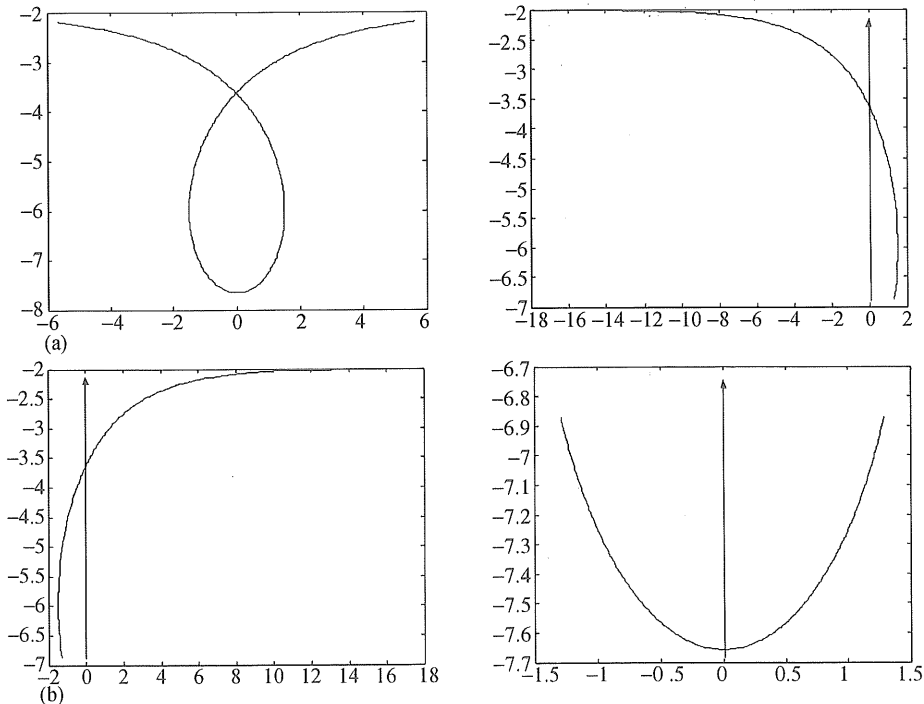


图 3 参数方程 (18) 的平面图

Fig. 3 The plane graphs of the parametric equation (18)

(a) 参数方程 (18) 的平面图, 其中  $\Delta=1$ ; (b) 参数方程 (18) 的三个破缺行波解的平面图

$$\begin{cases} \varphi(\theta) = -\sqrt{8\Delta}\operatorname{sech}\sqrt{2}\theta + 2\sqrt{\Delta} \\ \xi(\theta) \pm 2\sqrt{2}\theta \pm \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\tanh(\sqrt{2}\theta) + \xi_0 \end{cases} \quad (\theta \text{ 为参数}) \quad (18)$$

又由于行波系统 (6) 存在奇异直线  $\varphi=0$ , 使得该行波系统不连续, 成为奇异行波系统。受奇异直线  $\varphi=0$  的影响, 应有  $\varphi(\theta) < 0$  或者  $\varphi(\theta) > 0$ , 取  $\theta_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arsech}\sqrt{2}$ , 由 (17) 式表示的环状孤波解由  $\theta \in (-\infty, \theta_0)$ ,  $\theta \in (\theta_0, +\infty)$ ,  $\theta \in (-\theta_0, \theta_0)$  的三个破缺行波解组成 (如图 3)。

#### 参考文献:

- [1] KONNO K, ICHIKAWA Y H, WADATI M. A loop soliton propagating along a stretched rope [J]. *J Phys Soc Japan*, 1981, 50(3): 1025 - 1026.
- [2] VAKHNENKO V O, PARKES E J. The two loop soliton solution of the Vakhnenko equation [J]. *Nonlinearity*, 1998, 11: 1457 - 1464.
- [3] PARKES E J. Explicit solution of the reduced Ostrovsky equation [J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2007, 37(3): 602 - 610.
- [4] PARKES E J. Some periodic and solitary traveling-wave solution of the short-pulse equation [J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2008, 38(1): 154 - 159.
- [5] LI J B. Dynamical understanding of loop soliton solution for several nonlinear wave equations [J]. *Science in China: A*, 2007, 50(6): 773 - 785.
- [6] LI J B. Family of nonlinear wave equations which yield loop solutions and solitary wave solutions [J]. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 2009, 24(3): 897 - 907.
- [7] 李继彬. 两非线性波方程真圈解的存在性和破缺性 [J]. *应用数学和力学*, 2009, 30(5): 505 - 514.
- [8] LI J B, DAI H H. On the study of singular nonlinear traveling wave equations: dynamical approach [M]. Beijing: Science Press, 2007.
- [9] 刘正荣, Ali Mohammed Kayed. 分支方法与广义 CH 方程的显式周期波解 [J]. *华南理工大学学报: 自然科学版*, 2007, 35(10): 227 - 232.
- [10] 郭柏灵, 刘正荣. CH-r 方程的尖波解 [J]. *中国科学: A 辑*, 2003, 33(4): 325 - 337.
- [11] KADOMTSEV B B, PETVIASHVILI V I. On the stability of solitary waves in weakly dispersive media [J]. *Sov Phys Dokl*, 1970, 15: 539 - 541.
- [12] 郭柏灵. 非线性演化方程 [M]. 上海: 上海科技教育出版社, 1995.
- [3] ZHOU X Y, LI D. Continuous-time mean-variance portfolio selection: a stochastic LQ framework [J]. *Applied Mathematics and Optimization*, 2000, 42: 19 - 33.
- [4] CHIU M C, LI D. Asset and liability management under a continuous-time mean-variance optimization framework [J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2006, 39: 330 - 355.
- [5] XIE S X, LI Z F, WANG S Y. Continuous-time portfolio selection with liability: mean-variance model and stochastic LQ approach [J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2008, 42: 943 - 953.
- [6] YIN G, ZHOU X Y. Markowitz's mean-variance portfolio selection with regime switching: from discrete-time to their continuous-time limits [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49: 349 - 360.
- [7] ZHOU X Y, YIN G. Markowitz's mean-variance portfolio selection with regime switching: a continuous-time model [J]. *SIAM J Control OPTIM*, 2003, 42(4): 1466 - 1482.
- [8] CHEN P, YANG H L, YIN G. Markowitz's mean-variance asset-liability management with regime switching: a continuous-time model [J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2008, 43: 456 - 465.
- [9] XIE S X. Continuous-time mean-variance portfolio selection with liability and regime switching [J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2009, 45: 148 - 155.
- [10] ØKSENDAL B, SULEM A. Applied stochastic control of jump diffusions [M]. New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005.
- [11] GUO W J, XU C. Optimal portfolio selection when stock prices follow a jump diffusion process [J]. *Mathematical Methods of Operations Research*, 2004, 60(3): 485 - 496.
- [12] FLEMING W H, SONER H M. Controlled Markov processes and viscosity solutions [M]. New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1993: 163 - 164.

(上接第 33 页)